**ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)**

***

CONCOURS D'ADMISSION 1988

**

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

OPTIONS M, P' ET T.A.

(Durée de l'épreuve 2 heures)

Les candidats sont autorisés à se servir de toutes tables ou instruments de calcul. Ils indiqueront, en tête de leur copie, le matériel utilisé.

Pour les calculs de valeurs approchées, on fournira toutes les justifications utiles pour l'obtention de la précision demandée.

On désigne par f_p (p entier > 0) et par g les fonctions réelles de variable réelle définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_p(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^p}\,dt \qquad g(x) = e^{-x} f_1(x).$$

L'objet du problème est l'étude des variations de la fonction g et de son comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$, ainsi que le calcul numérique approché de valeurs de g(x), ce qui fait l'objet de la Partie - II. Dans la Partie - I, on établit des résultats concernant les fonctions f_p, utiles pour la suite.

PARTIE - I — Etude des fonction f_p

I.1 Etudier les variations de f_1.

I.2 a) Que peut-on dire de $f_1(x)$ lorsque x tend vers 0 ?

b) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\,dt$ existe et en déduire la partie principale de f_1 au voisinage de 0.

I.3 Etude grossière de f_1 au voisinage de $+\infty$.

a) Etablir, pour tout $x > 0$, la relation : (1) $\qquad f_1(x) = \frac{e^x}{x} - e + f_2(x).$

b) Etablir, pour tout $x \geqslant 2$, la relation : (2) $\qquad f_1(x) \leqslant e^{x/2} \ln x + \frac{2}{x} e^x.$

(On pourra décomposer l'intervalle d'intégration [1, x] en les deux intervalles $[1, \frac{x}{2}]$ et $[\frac{x}{2}, x]$).

c) En déduire qu'il existe des constantes A et B strictement positives telles que, pour x assez grand :

$$\frac{Ae^x}{x} \leqslant f_1(x) \leqslant \frac{Be^x}{x}.$$

I.4 Etude grossière, au voisinage de $+\infty$, des fonctions f_p.

a) Soit un entier $n > 1$. Etablir une relation entre f_n et f_{n+1} généralisant (1).

b) Etablir également une majoration de $f_n(x)$, pour $x \geqslant 2$, remplaçant la relation (2).

c) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe des constantes strictement positives A_n et B_n telles que, pour x assez grand :

$$A_n \frac{e^x}{x^n} \leqslant f_n(x) \leqslant B_n \frac{e^x}{x^n}.$$

I.5 Partie principale des fonctions f_n au voisinage de $+\infty$.

a) Déterminer la partie principale de $f_1(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, en utilisant à nouveau la relation (1).

b) Plus généralement, déterminer la partie principale de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

PARTIE - II — Etude de la fonction g

II.1 Variations de la fonction g.

a) Exprimer la fonction dérivée g' à l'aide de la fonction f_2. Calculer g'(1).

b) Prouver qu'il existe un nombre réel unique $\alpha > 1$ tel que $f_2(\alpha) = e$.

c) En déduire les variations de g. Préciser g (α) à l'aide de α.

d) Déterminer les parties principales de g(x) lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.

II.2 Calcul de valeurs approchées de g(x) et de g'(x) lorsque $x \in]0, 1]$.

La méthode consiste à évaluer g et g' à l'aide de f_1 et à approcher f_1 grâce à un développement taylorien de $t \longmapsto e^t$.

a) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose : $S_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!}$ et $R_n(t) = e^t - S_n(t)$.

Montrer que, pour tout élément t de [0, 1] et pour tout entier n : $0 \leqslant R_n(t) \leqslant \frac{e\, t^{n+1}}{(n+1)!}$.

b) En déduire un encadrement de la fonction f_1 sur]0, 1].

c) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ à la précision 10^{-3}.

II.3 Calcul de valeurs approchées de g(x) et de g'(x) lorsque $x \in [1, 3]$ et d'une valeur approchée de α.

La méthode consiste, cette fois, à évaluer g et g' à l'aide de f_2 et à approcher f_2 grâce au développement taylorien de $t \longmapsto e^t$.

a) On écrit à nouveau $e^t = S_n(t) + R_n(t)$.

Montrer que, pour tout élément t de [1, 3] : $\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant R_n(t) \leqslant \frac{e^3\, t^{n+1}}{(n+1)!}$

b) En déduire un encadrement de la fonction f_2 sur l'intervalle [1, 3].

c) Calculer des valeurs approchées des nombres $f_2(2)$, g(2) et g'(2) à la précision 10^{-3}. Que peut-on en déduire en particulier pour le nombre α ?

d) Justifier l'encadrement $2{,}2 < \alpha < 2{,}4$. Donner une valeur approchée du nombre $g(\alpha)$.

II.4 Dessiner la courbe représentative de la fonction g.

II.5 Comportement asymptotique de g et calcul de g et g' pour de grandes valeurs de la variable.

a) Déterminer deux suites $\left(a_p\right)_{p>0}$ et $\left(b_p\right)_{p>0}$ de réels telles que, pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$(3) \qquad g(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{a_p}{x^p} + b_n\, e^{-x} + n!\, e^{-x} f_{n+1}(x)$$

Dans la suite du problème, on suppose x fixé > 1 et on pose : $r_n = n!\, e^{-x} f_{n+1}(x)$.

b) Montrer que $\lim_{n \to \infty} r_n = +\infty$. Ainsi, l'utilisation de trop grandes valeurs de n, dans la formule (3), ne pouvant convenir au calcul approché de g(x), on se propose de déterminer une valeur optimale de n, c'est-à-dire un entier n_x minimisant r_n.

c) A l'aide de la relation trouvée dans I.4 a), étudier $\frac{r_n}{r_{n-1}} - 1$ et déterminer un tel entier.

d) On choisit x = 30. Montrer que r_8 est le minimum de la suite (r_n). Déterminer une valeur approchée par excès de r_8 : à cet effet on étudiera la convexité de la fonction $t \longmapsto \frac{e^t}{t^9}$ et on majorera cette fonction par des fonctions linéaires sur chacun des intervalles [1, 9] et [9, 30].

e) Déterminer enfin à l'aide de ce qui précède des valeurs approchées de g(30) et de g'(30). Quelles sont les précisions obtenues ?

***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail